(combinaisons linéaires suite)

Cours 2.2
AL MT
19.09.24

<u>cas $p=2$</u> : si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$
avec $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$

- si $\vec{v} \in \text{Vect}\{\vec{u}\}$ ← la droite passant par 0 et $\vec{u}$

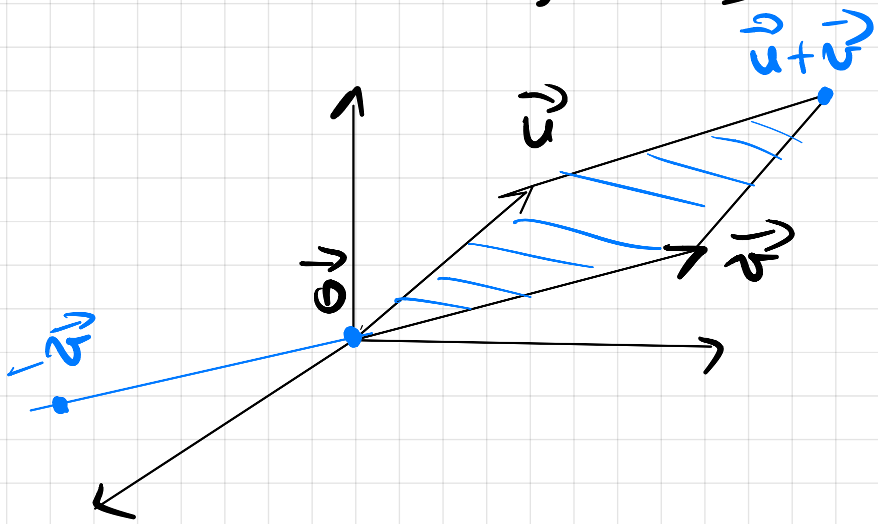
alors on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont <u>colinéaires</u>
(càd $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.q $\vec{v} = \lambda \vec{u}$)

et dans ce cas

$$\text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\} = \text{Vect}\{\vec{u}\}.$$

- si $\vec{v} \notin \text{Vect}\{\vec{u}\}$
($\vec{v}$ n'est pas "multiple" de $\vec{u}$)

alors $\text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$ = le plan passant par $\vec{0}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$
(dans $\mathbb{R}^3$)



Applications :

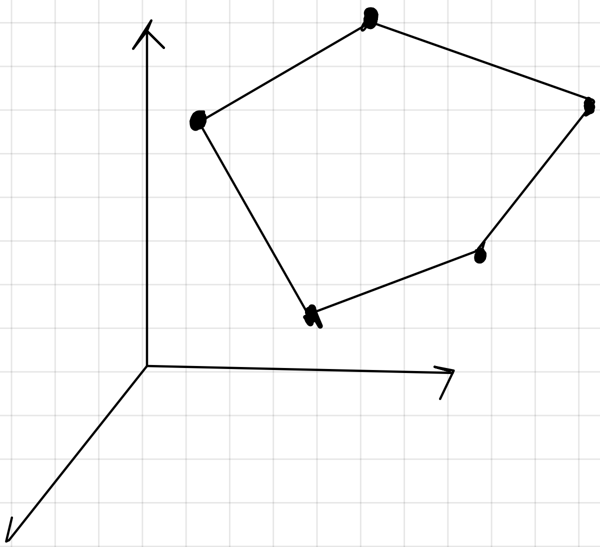
Si $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ n, k entiers ≥ 1

1) et $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{R}$ $m_i > 0$

points : $\vec{v}_i$
masses : m_i

$m = m_1 + \dots + m_k$

= masse totale du système.



le centre de gravité du système de points matériels

$$\vec{v}_g \overset{\text{déf}}{:=} \frac{1}{m}(m_1 \vec{v}_1 + \dots + m_k \vec{v}_k)$$

$$\in \text{Vect}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$$

2) Théorie (additive) des couleurs

code couleur d'un pixel RGB Red Green Blue

une couleur est un $(r, g, b) \in [0,1]^3$

càd $0 \leq r \leq 1$

$0 \leq g \leq 1$

$0 \leq b \leq 1$

et peut être représentée comme

C.L. de couleurs de base.

spéciale càd avec

ex : $(1,0,0)$ = rouge

$(0,1,0)$ = vert

$(0,0,1)$ = bleu

autres façons de coder des couleurs

C = cyan
M = magenta
Y = yellow
(K = black)

Hue
Saturation
Brightness

§ 1.4 : L'équation matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$

<u>POV</u> : dans l'éq. vectorielle

$$x_1 \vec{a}_1 + \cdots + x_n \vec{a}_n = \vec{b}$$

la partie de gauche (qui est une C.L. des $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$)
peut être vue comme
le produit d'une matrice A
par un vecteur $\vec{x}$

<u>Déf</u> : si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ — m lignes, n colonnes

notons $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ ses colonnes
de sorte que $A = \left(\vec{a}_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \vec{a}_n \right)$
et soit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

On pose $A\vec{x} \underset{\text{déf}}{=} x_1 \vec{a}_1 + \cdots + x_n \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$

$\in \mathrm{Vect}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$

ex :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times 1} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{}_{\vec{a}_1}\ \underbrace{}_{\vec{a}_2}\ \underbrace{}_{\vec{a}_3}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{4\times 1} \in \mathbb{R}^4$$

ex :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{ev}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ 3x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 3x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{ev}{=} \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix} \overset{\text{remarque}}{=}$$

$$\left(\text{notons}\quad \begin{array}{l}\vec{\ell}_1 = (1\ 2\ 3)\\ \vec{\ell}_2 = (2\ 3\ 2)\\ \vec{\ell}_3 = (3\ 2\ 1)\end{array} \quad \text{les lignes de } A\right)$$

remarque

$$= \begin{pmatrix} \vec{\ell}_1^{\,T} \cdot \vec{x} \\ \vec{\ell}_2^{\,T} \cdot \vec{x} \\ \vec{\ell}_3^{\,T} \cdot \vec{x} \end{pmatrix} \qquad \text{où } \ell_1^T = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

où $\vec{x}\cdot\vec{y}$ = le produit scalaire de $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ $= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \in \mathbb{R}$$

Rem/importante : $\boxed{\text{Autre calcul de } Ax \text{ règle ligne-vecteur}}$

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

Soit $A = (\vec{a}_1 \mid \cdots \mid \vec{a}_n) = \begin{pmatrix} \text{---}\ \vec{\ell}_1\ \text{---} \\ \vdots \\ \text{---}\ \vec{\ell}_m\ \text{---} \end{pmatrix}$ $\quad \vec{a}_i \in \mathbb{R}^m$, $\vec{\ell}_i \in \mathbb{R}^n$

et soit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

alors, le produit matriciel $A\vec{x}$ est égal à

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n a_n \overset{!!}{=} \begin{pmatrix} \vec{\ell}_1 \cdot \vec{x} \\ \vec{\ell}_2 \cdot \vec{x} \\ \vdots \\ \vec{\ell}_m \cdot \vec{x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

soit $0 \leq i \leq m$

alors la ième coordonnée de Ax vaut

$$\boxed{(Ax)_i = \vec{\ell}_i \cdot \vec{x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}$$

Notons par $\vec{\ell}_i = (a_{i1} \; a_{i2} \; \dots \; a_{in})$

Morale de ☺ : la ième comp. de Ax est égale au prod. scal. de $\vec{x}$ avec la ième ligne de A.

ex :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{4\times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot(-1) \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot(-1) \\ 2\cdot 1 + 3\cdot 0 + 0\,(-1) \\ 4\cdot 1 + 0\cdot 0 + 2(-1) \end{pmatrix}_{4\times 1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Rem : On voit donc que toute matrice

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ donne lieu

à une transformation (linéaire)

$$T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$\vec{x} \longmapsto A\vec{x}$$

Propriétés de Ax :

Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$

alors

i) $A\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$ $\in \mathbb{R}^m$

ii) $A(\lambda\vec{u}) = \lambda(A\vec{u})$

TL

(Transformation Linéaire ou Application linéaire)

en particulier on a que

$$\boxed{A \cdot \vec{0} = \vec{0}}$$

$\vec{0} \in \mathbb{R}^m$

$\vec{0} \in \mathbb{R}^n$

ex :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}_{3\times 2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{2\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

Thm 3 :

$$A = (\vec{a}_1 \mid \cdots \mid \vec{a}_n)_{m\times n}$$

$\vec{a}_i \in \mathbb{R}^m$

$\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

Alors l'équation matricielle

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

a le même ensemble solution que l'équation vectorielle

$$x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$$

qui a le même ens. solution que le système linéaire dont la matrice augmentée est $\left(\vec{a}_1 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \vec{a}_n \,\vdots\, \vec{b}\right)$

Donc $A\vec{x} = \vec{b}$ possède au moins une solution

$\Leftrightarrow$ $\vec{b}$ est C.L. des colonnes de A

$\Leftrightarrow$ $\vec{b} \in \text{Vect}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} = \text{Col}(A)$

l'espace des colonnes de A

Thm 4 (p.40)

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ ses colonnes. Alors on a les conditions équivalentes suivantes:

a) Pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, l'éq. $A\vec{x} = \vec{b}$ possède au moins une solution (dans $\mathbb{R}^n$)

b) Tout vecteur $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ est combinaison linéaire des colonnes de A.

c) $\text{Vect}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} = \mathbb{R}^m$

d) il existe une position de pivot dans chaque ligne de A.

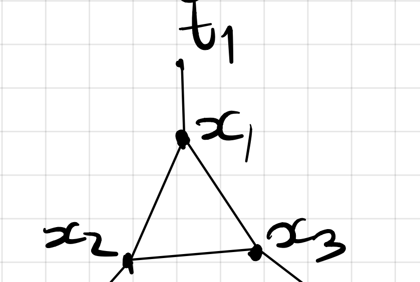
ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 4}$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Thm $\Longrightarrow$ $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

alors l'éq. $A\vec{x} = \vec{b}$ possède au moins une solution

ex (grille chauffante)



$$\overset{H}{\Longrightarrow} \begin{cases} x_1 = \dfrac{t_1 + x_2 + x_3}{3} \\ x_2 = \dfrac{x_1 + t_2 + x_3}{3} \\ x_3 = \dfrac{x_1 + x_2 + t_3}{3} \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = t_1 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = t_2 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = t_3 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & t_1 \\ -1 & 3 & -1 & t_2 \\ -1 & -1 & 3 & t_3 \end{array}\right) \underset{l_3 - l_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & t_1 \\ -1 & 3 & -1 & t_2 \\ 0 & -4 & 4 & t_3 - t_2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{l_1 \leftrightarrow l_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & t_2 \\ 3 & -1 & -1 & t_1 \\ 0 & -4 & 4 & t_3 - t_2 \end{array}\right)$$

$$\underset{l_2 + 3l_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & t_2 \\ 0 & 8 & -4 & t_1 + 3t_2 \\ 0 & -4 & 4 & t_3 - t_2 \end{array}\right)$$

$$\underset{l_2/2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & t_2 \\ 0 & 4 & -2 & \frac{t_1 + 3t_2}{2} \\ 0 & -4 & 4 & t_3 - t_2 \end{array}\right)$$

$$
\begin{array}{l}
\ell_3+\ell_2 \\ \rightsquigarrow \\ -\ell_1
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & -3 & 1 & -t_2 \\
0 & 4 & -2 & \dfrac{t_1+3t_2}{2} \\
0 & 0 & 2 & \dfrac{t_1+3t_2}{2} + t_3 - t_2
\end{array}\right)
$$

calcul

$$
\begin{array}{l}
\ell_2+\ell_3 \\ \rightsquigarrow \\ \ell_3/2
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & -3 & 1 & -t_2 \\
0 & 4 & 0 & t_1+3t_2 + t_3 - t_2 \\
0 & 0 & 1 & \dfrac{t_1+3t_2}{4} + \dfrac{t_3-t_2}{2}
\end{array}\right)
$$

$$
\begin{array}{l}
\ell_2/4 \\ \rightsquigarrow
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & -3 & 1 & -t_2 \\
0 & 1 & 0 & \dfrac{t_1+2t_2+t_3}{4} \\
0 & 0 & 1 & \dfrac{t_1+t_2+2t_3}{4}
\end{array}\right)
$$

calcul

$$
\begin{array}{l}
\ell_1+3\ell_2-\ell_3 \\ \rightsquigarrow
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & \dfrac{2t_1+t_2+t_3}{4} \\
0 & 1 & 0 & \dfrac{t_1+2t_2+t_3}{4} \\
0 & 0 & 1 & \dfrac{t_1+t_2+2t_3}{4}
\end{array}\right)
$$

$$S = \left\{ \left(\frac{2t_1+t_2+t_3}{4}, \frac{t_1+2t_2+t_3}{4}, \frac{t_1+t_2+2t_3}{4} \right) \right\}$$

$t_1 = 16°$
$t_2 = 12°$
$t_3 = 20°$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \overset{\text{calcul}}{=} \begin{pmatrix} 16° \\ 15° \\ 17° \end{pmatrix}$$

§ 1.5 Ens. de solutions de syst. lin

(p. 46)

<u>Def</u> : $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Un eq. de la forme

$A\vec{x} = \vec{b}$ est dite <u>homogère</u> si $\vec{b} = \vec{0}$

et <u>inhomogène</u> si $\vec{b} \neq \vec{0}$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
$\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

Thm 5 :

1) Un syst. homogène $A\vec{x} = \vec{0}$
a toujours la sol. nulle $\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$

2) Un syst. homogène $A\vec{x} = \vec{0}$
admet une solution non-nulle
(et donc une infinité)

$\Longleftrightarrow$ la forme échelonnée (réduite) de A
possède au moins une variable libre
càd il y a moins de pivots
que de colonnes (ou de variables) . .

(plus d'exemples la sem. prochaine).